Condiciones de equilibrio en el interior de una estrella y su fuente de energía

R. Gamen

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, UNLP

2020a

Índice

Modelo estelar

Podemos modelar el interior estelar suponiendo:

- (simetría)
- distribución de masa
- distribución de luminosidad
- condición de equilibrio hidrostático
- transporte radiativo (o convectivo)
- ecuación de estado

Dada una masa y abundancias, estas condiciones se deben cumplir en todo el interior estelar: modelo estelar.

Distribución de masa

$$dM(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr \tag{1}$$

Es decir:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \tag{2}$$

También llamada ecuación de continuidad de masa.

Distribución de Luminosidad

Consideramos que la energía fluye desde el centro hasta la superficie. Entonces:

$$L(r + dr) = L(r) + \epsilon(r)\rho(r)4\pi r^2 dr \tag{3}$$

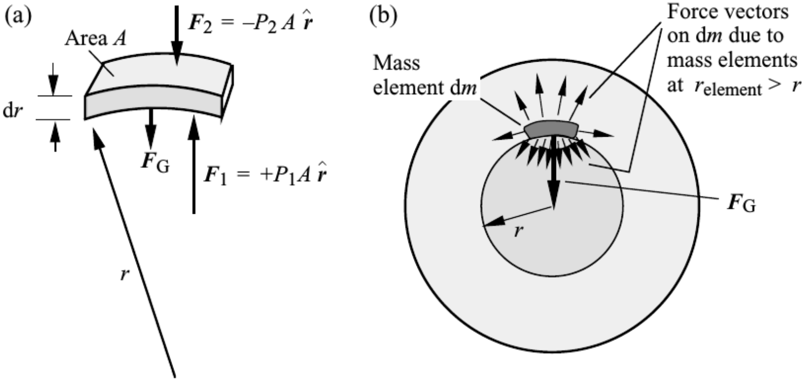
Es decir:

$$\frac{dL(r)}{dr} = \epsilon(r)\rho(r)4\pi r^2 \tag{4}$$

También llamada ecuación de equilibrio térmico.
Si integramos esta ecuación entre 0 y R. Obtenemos la L total de la estrella: $L = \int_0^R 4\pi r^2 \epsilon(r)\rho(r)dr$
Lo que implica que la energía total radiada por la estrella (por unidad de tiempo) debe ser compensada por la “creación de energía” ϵ en el interior estelar, reacciones nucleares.

Equilibrio hidrostático

Un “elemento” de estrella debe estar en equilibrio hidrostático.



Si suponemos simetría esférica, solo lo debemos plantear en la dirección radial.

Equilibrio hidrostático

$$
\begin{aligned}
F_g + F_p &= 0 && (5)\\
F_g - A(P_2 - P_1) &= 0 && (6)\\
F_g + (-AdP) &= 0 && (7)\\
AdP &= F_g && (8)\\
AdP &= \frac{-GM(r)\rho(r)Adr}{r^2} && (9)\\
dP &= \frac{-GM(r)\rho(r)dr}{r^2} && (10)\\
\frac{dP}{dr} &= \frac{-GM(r)\rho(r)}{r^2} && (11)\\
\frac{dP}{dr} &= -\rho(r)g(r) && (12)
\end{aligned}
$$

Equilibrio hidrostático

Utilizamos la ecuación de equilibrio hidrostático para calcular la presión central de una estrella (aprox!).

$$dP = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}dr \tag{13}$$

Suponer: $\rho(r) =< \rho >$; $M(r) =< \rho > 4/3\pi r^3$.

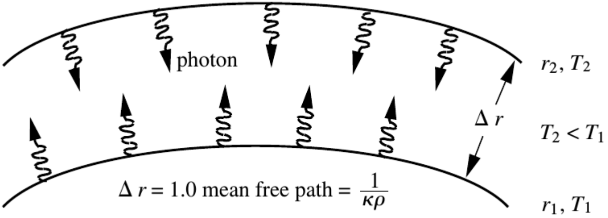
Obtenemos:

$$P_c = \frac{3G}{8\pi}\frac{M^2}{R^4} \tag{14}$$

En el caso del Sol nos da: 10^{14} Pa (=N m^2). Recordar: 1 atm $\sim 10^5$ Pa.

Ecuación de transporte radiativo

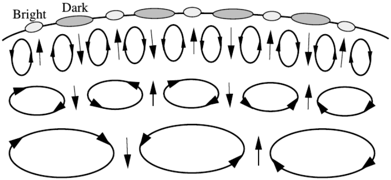
Consideramos que la energía es transportada por fotones:



$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3}{64\pi\sigma}\frac{k(r)\rho(r)}{T(r)^3 r^2}L(r) \quad \text{radiativo} \tag{15}$$

Ecuación de transporte convectivo

Consideramos que la energía es transportada por la propia materia:



$$\frac{dT(r)}{dr} = (1 - \frac{1}{\gamma})\frac{T(r)}{p(r)}\frac{dP}{dr} \quad \text{convectivo} \tag{16}$$

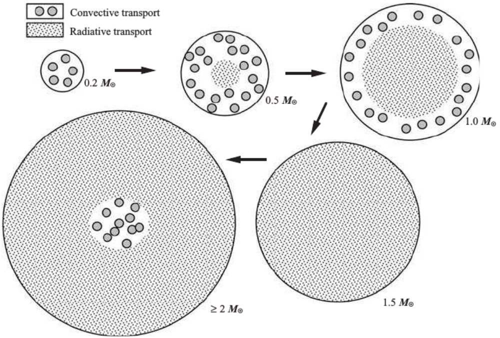
donde $\gamma = C_p/C_v$ (calores específicos a presión o volumen constante).

¿Transporte radiativo o convectivo?

El llamado criterio de Schwarzchild, nos dice qué transporte tendrá lugar en la estrella:

$$\left.\frac{dT(r)}{dr}\right|_{\mathrm{RAD}} > \left.\frac{dT(r)}{dr}\right|_{\mathrm{CONV}} \rightarrow \quad \text{convectivo} \tag{17}$$

Ninguna estrella es totalmente radiativa o convectiva, habrá un “radio” donde se igualan ambos gradientes. Esta cáscara marca el límite entre el núcleo y la envoltura.



Ecuación de estado

Suponemos gases ideales (o neutrones o materia degenerada):

$$P = \frac{\rho}{m_{\rm av}} kT \qquad \text{gases ideales} \tag{18}$$

donde $m_{\rm av}$ es la masa promedio de la “región”.

Sabiendo la P_c, podemos calcular la T_c ... resulta unos 10^7 K ! $\rightarrow$ reacciones nucleares.

Exploremos algunas fuentes de energía.

Si las estrellas nacen de una nube de gas, podríamos querer calcular la energía potencial.

Para que una nube colapse se debe cumplir el llamado **criterio de Jeans**:

$$E_k \leq |E_p| \tag{19}$$

Es decir:

$$\frac{1}{2} m_H v^2 \leq G \frac{M m_H}{R} \tag{20}$$

La E_k de un átomo de H debe ser menor a la E_p que ejerce la nube sobre el átomo.

Despreciando constantes, la masa de la nube es $M \sim \rho R^3$.

$$v^2 \leq G\rho R^2 \tag{21}$$

Despejando el radio:

$$R \leq \frac{v}{\sqrt{G\rho}} \tag{22}$$

Este es el radio crítico para que se desarrolle un colapso gravitatorio. También se denomina **radio de Jeans**.

Teorema del Virial

Es una forma global de entender el equilibrio hidrostático en las estrellas. Implica una relación entre energías cinética y potencial:

$$2\sum E_k + \sum E_p = 0 \tag{23}$$

Se puede deducir a partir de la ecuación de equilibrio hidrostático y la expresión del volumen en función del radio.

Deducción del teorema del Virial

$$\frac{dP}{dr} = \frac{-GM(r)\rho(r)}{r^2} \quad (24)$$

$$V(r)dr = \frac{4}{3}\pi r^3 dr \quad (25)$$

multiplico ambas ecuaciones:

$$V(r)dP = \frac{-GM(r)}{3r}(4\pi r^2 \rho(r)dr) \quad (26)$$

$$V(r)dP = \frac{-GM(r)}{3r}dM(r) \quad (27)$$

$$(28)$$

integro en "toda la estrella" ambos miembros:

$$\int_* VdP = -\frac{1}{3}\int_* \frac{-GM(r)}{r}dM(r) \quad (29)$$

$$(30)$$

El miembro derecho es $1/3 \sum E_p$. El izquierdo?

Veamos qué es el miembro izquierdo:

$$
\begin{aligned}
dPV &= VdP + PdV & (31)\\
\text{integro en “toda la estrella”:} & & (32)\\
\int_* dPV &= \int_* VdP + \int_* PdV & (33)\\
PV|_0^R &= \int_* VdP + \int_* PdV & (34)
\end{aligned}
$$

como $V(0) = 0$ y $P(R) = 0$:

$$\int_* VdP = -\int_* PdV \tag{35}$$

Así obtenemos la forma más general del teorema del Virial:

$$-3\int_* PdV = \sum E_p \tag{36}$$

Podemos suponer que tenemos un gas ideal no-relativista:

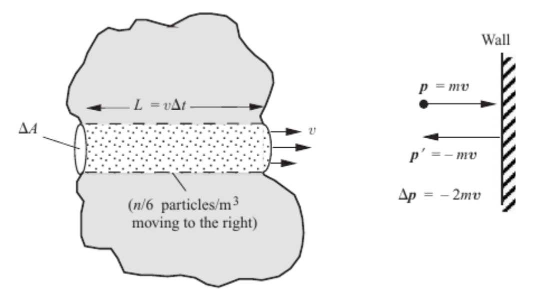
$$P = \frac{2}{3} n (\frac{1}{2} m v^2) = \frac{2}{3} u_k \tag{37}$$

donde u_k es la densidad de energía cinética. Reemplazo en (36):

$$\begin{aligned} -3 \int_* P dV &= \sum E_p && (38) \\ -3 \frac{2}{3} \int_* u_k dV &= \sum E_p && (39) \\ -2 \sum E_k &= \sum E_p && (40) \end{aligned}$$

Qué es la presión? a qué nos referimos?

Supongamos un volumen cuadrado de partículas iguales que chocan con la misma *v* contra las paredes:



El momento de cada partícula es $\vec{p} = m\vec{v}$. Estas rebotan elásticamente contra la pared y su nuevo momento es $\vec{p'} = -m\vec{v}$. El cambio del momento es:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p'} - \vec{p} = -2m\vec{v} \tag{41}$$

El signo menos implica que el $\Delta\vec{p}$ es opuesto a la dirección $\vec{v}$. Por conservación del momento, un momento positivo debió ser transferido a la pared.

El “cambio” en el momento es, por definición, la fuerza, $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. La fuerza por unidad de área es la presión que estamos buscando.

La presión es el momento transferido a la pared. En el caso de nuestro gas, tenemos que las partículas que golpearán la pared por unidad de tiempo son aquellas dentro del volumen $V = v\Delta t\Delta A$. Por simplicidad podemos suponer que un sexto de las partículas se mueven hacia una de las seis paredes del cubo:

$$N = \frac{n}{6}V = \frac{n}{6}v\Delta t\Delta A \tag{42}$$

donde n es la densidad de partículas.

La presión entonces será el momento total transferido a la pared por unidad de tiempo y área por todas las partículas (42):

$$P = N\frac{\Delta p}{\Delta t\Delta A} = \frac{n}{6}v\Delta t\Delta A\frac{2mv}{\Delta t\Delta A} = \frac{2}{3}n(\frac{1}{2}mv^2) \tag{43}$$

Es decir que la presión es proporcional al producto de la densidad de partículas y la energía cinética de una partícula, i.e. $P = 2/3u_k$. Este resultado también se obtiene haciendo “las cosas bien”, suponiendo una distribución tridimensional de las $\vec{v}$.

Esta relación entre energías cinética y potencial:

$$2\sum E_k + \sum E_p = 0 \tag{44}$$

implica:

$$E = -E_k \tag{45}$$
$$E = \frac{1}{2}E_p \tag{46}$$

Si la nube de gas está a $T > 0$, debe radiar ($\delta E < 0$):

$$\delta E = \frac{1}{2}\delta E_p \implies \delta E_p < 0 \implies \text{se contrae} \tag{47}$$
$$\delta E = -\delta E_k \implies \delta E_k > 0 \implies \text{se calienta} \tag{48}$$

Si el Sol brillara solo por su E_p con la $L_\odot$ conocida, solo viviría 10 millones de años.

Reacciones nucleares

Los núcleos atómicos están formados por protones (p) y neutrones (n). Aunque los p se repelen electromagnéticamente, la fuerza nuclear fuerte los liga (actúa a distancias muy pequeñas).

Se puede “entender” la necesidad de tener n en un núcleo. Los n agregan ligaduras adicionales entre los nucleones. Esto explica, en parte, que los núcleos más estables tengan número de n y p similares.

Reacciones nucleares

Las reacciones nucleares se pueden notar:

$$x + A \rightarrow y + B \tag{49}$$

o

$$0 + 1 \rightarrow 2 + 3 \tag{50}$$

En el lado izquierdo: x(0) es el “proyectil” y A(1) el *target*, definidos como canal de entrada. Del otro lado, y(2) y B(3) con los núcleos emergentes o canal de salida.

Reacciones nucleares

Las reacciones nucleares pueden ser:

- decaimiento α (un núcleo emite una partícula α: ^{4}He):
  ${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$
- decaimiento β (actúa la fuerza nuclear débil): e^- o e^+ y neutrinos
  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ (vida media del n es 886 s)
  $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ (no ocurre naturalmente)
- decaimiento γ (emisión de fotones de alta energía por cambio niveles de energía del núcleo)
- fisión
- fusión

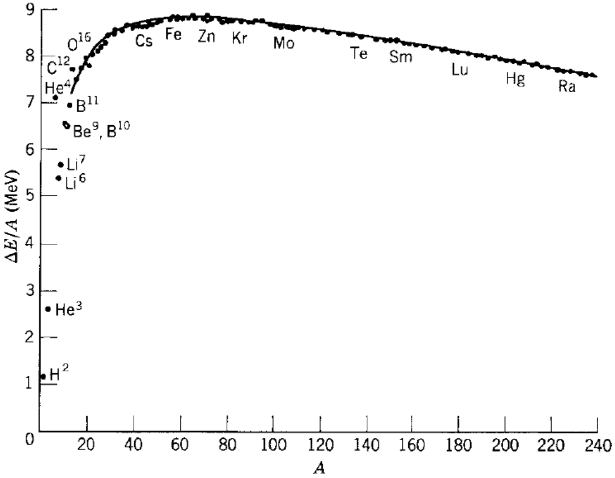
Una fusión nuclear consiste en la “unión” de 2 (o más) núcleos livianos para formar uno nuevo más pesado.

Reacciones nucleares

Aplicando la ley de conservación masa-energía, se puede escribir:

$$Q = (m_0 + m_1 - m_2 - m_3)c^2 \tag{51}$$

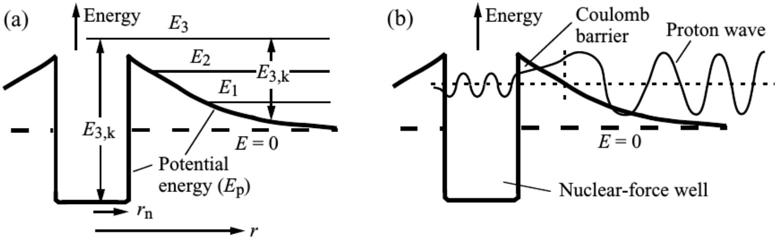
Para valores positivos de Q, se produce energía (reacción exotérmica). Si Q es negativo, absorbe (endotérmica).


9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
$\Delta E/A$ (MeV)
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
A
O^{16}
C^{12}
He^{4}
B^{11}
Be^{9}, B^{10}
Li^{7}
Li^{6}
He^{3}
H^{2}
Cs
Fe
Zn
Kr
Mo
Te
Sm
Lu
Hg
Ra

Reacciones nucleares

Cuando los núcleos están separados se repelen por sus cargas eléctricas (potencial Coulombiano). Para “romper” esta barrera debemos acelerar las partículas a altas energías y hacerlos colisionar.

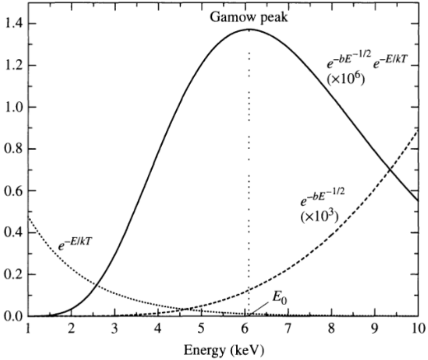
Una forma es calentarlos (distribución de Maxwell-Boltzmann). Se necesitan $T > 10^{10}$ K. Solución cuántica: “efecto túnel”.



Reacciones nucleares

Se puede mostrar (con cuentas muy pesadas) que la probabilidad que se produzcan reacciones nucleares, está dado por:

$$r = (\frac{2}{kT})^{\frac{3}{2}} \frac{n_i n_x}{\sqrt{\mu_m \pi}} \int_0^\infty S(E) e^{-\frac{b}{\sqrt{E}}} e^{-\frac{E}{kT}} dE \tag{52}$$



Cadena p–p

$$
\begin{aligned}
{}^{1}H + {}^{1}H &\rightarrow {}^{2}H + \nu_e + e^{+} && (53)\\
{}^{2}H + {}^{1}H &\rightarrow {}^{3}He + \gamma && (54)\\
{}^{3}He + {}^{3}He &\rightarrow {}^{4}He + 2\,{}^{1}H && (55)
\end{aligned}
$$

donde ${}^{2}H$ es el deuterio, ν_e es uno de los 3 tipos de neutrinos.

Cadena o ciclo CNO

Se da en núcleos con mayores T (estrellas masivas).

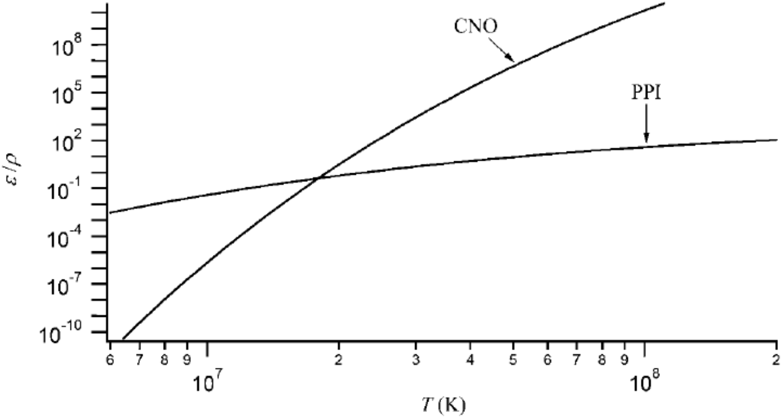
$$
\begin{aligned}
{}^{12}C + {}^{1}H &\rightarrow {}^{13}N + \gamma && (56)\\
{}^{13}N &\rightarrow {}^{13}C + \nu + e^{+} && (57)\\
{}^{13}C + {}^{1}H &\rightarrow {}^{14}N + \gamma && (58)\\
{}^{14}N + {}^{1}H &\rightarrow {}^{15}O + \gamma && (59)\\
{}^{15}O &\rightarrow {}^{15}N + \nu + e^{+} && (60)\\
{}^{15}N + {}^{1}H &\rightarrow {}^{12}C + {}^{4}He && (61)
\end{aligned}
$$

4 H se convierten en 1 He. C, N y O actúan como catalizadores, no se consumen.

Cadena o ciclo CNO con variantes

CNOI		CNOII		CNOIII
$^{1}H + {}^{12}C \rightarrow {}^{13}N + \gamma$				
$^{13}N \rightarrow {}^{13}C + e^{+} + \nu_e$				
$^{1}H + {}^{13}C \rightarrow {}^{14}N + \gamma$				
$^{1}H + {}^{14}N \rightarrow {}^{15}O + \gamma$	$\longrightarrow$	$^{1}H + {}^{14}N \rightarrow {}^{15}O + \gamma$		
$^{15}O \rightarrow {}^{15}N + e^{+} + \nu_e$	$\longrightarrow$	$^{15}O \rightarrow {}^{15}N + e^{+} + \nu_e$		
$^{1}H + {}^{15}N \rightarrow {}^{12}C + {}^{4}He$		$^{1}H + {}^{15}N \rightarrow {}^{16}O + \gamma$	$\longrightarrow$	$^{1}H + {}^{15}N \rightarrow {}^{16}O + \gamma$
		$^{1}H + {}^{16}O \rightarrow {}^{17}F + \gamma$	$\longrightarrow$	$^{1}H + {}^{16}O \rightarrow {}^{17}F + \gamma$
		$^{17}F \rightarrow {}^{17}O + e^{+} + \nu_e$	$\longrightarrow$	$^{17}F \rightarrow {}^{17}O + e^{+} + \nu_e$
		$^{1}H + {}^{17}O \rightarrow {}^{14}N + {}^{4}He$		$^{1}H + {}^{17}O \rightarrow {}^{18}F + \gamma$
				$^{18}F \rightarrow {}^{18}O + e^{+} + \nu_e$
				$^{1}H + {}^{18}O \rightarrow {}^{15}N + {}^{4}He$

Comparación p–p vs CNO



Cadena 3α

$$
\begin{aligned}
{}^4He + {}^4He &\rightarrow {}^8Be + \gamma & (62)\\
{}^8Be + {}^4He &\rightarrow {}^{12}C* + \gamma & (63)\\
{}^{12}C* &\rightarrow {}^{12}C + \gamma & (64)
\end{aligned}
$$

donde ${}^{12}C*$ es un núcleo de carbono en un estado excitado. La primer reacción nuclear en endotérmica (requiere energía, unos 92 keV). Se suele simplificar como:

$$
3\,{}^4He \rightarrow {}^{12}C + 3\gamma \qquad (65)
$$

y de allí toma el nombre.

Otras reacciones que convierten He

$$^{12}C +^{4} He \rightarrow {}^{16}O + \gamma \quad (66)$$

$$^{16}O +^{4} He \rightarrow {}^{20}Ne + \gamma \quad (67)$$

$$^{20}Ne +^{4} He \rightarrow {}^{24}Mg + \gamma \quad (68)$$

Otras reacciones que convierten C

$$
\begin{aligned}
{}^{12}C +^{12} C &\rightarrow {}^{20}Ne +^{4} He & (69)\\
{}^{12}C +^{12} C &\rightarrow {}^{24}Mg + \gamma & (70)\\
{}^{12}C +^{12} C &\rightarrow {}^{16}O + 2^{4}He & (71)\\
{}^{12}C +^{12} C &\rightarrow {}^{23}Mg + n & (72)
\end{aligned}
$$

Los últimos 2 son endotérmicos.

Otras reacciones ...

La quema de C, crea O, Ne y Mg.

$$\begin{aligned}
{}^{20}Ne + \gamma &\rightarrow {}^{16}O + {}^{4}He && (73)\\
{}^{20}Ne + {}^{4}He &\rightarrow {}^{24}Mg + \gamma && (74)\\
{}^{24}Mg + {}^{4}He &\rightarrow {}^{28}Si + \gamma && (75)\\
{}^{20}Ne + {}^{20}Ne &\rightarrow {}^{16}O + {}^{24}Mg && (76)
\end{aligned}$$

Quema del Oxígeno:

$$\begin{aligned}
{}^{16}O + {}^{16}O &\rightarrow {}^{30}Si + 2\,{}^{1}H && (77)\\
{}^{16}O + {}^{16}O &\rightarrow {}^{28}Si + {}^{4}He && (78)\\
{}^{16}O + {}^{16}O &\rightarrow {}^{31}P + {}^{1}H && (79)\\
{}^{16}O + {}^{16}O &\rightarrow {}^{31}S + n && (80)
\end{aligned}$$

Otras reacciones ...

Como se ha visto algunos núcleos pueden sufrir decaimientos α.
Estos núcleos son vitales para las últimas etapas:

$$^{28}Si +^4 He \rightarrow {}^{32}S + \gamma \tag{81}$$

Y si hay suficientes α:

$$
\begin{aligned}
^{32}S +^4 He &\rightarrow {}^{36}Ar + \gamma & (82)\\
^{36}Ar +^4 He &\rightarrow {}^{40}Ca + \gamma & (83)\\
^{40}Ca +^4 He &\rightarrow {}^{44}Ti + \gamma & (84)\\
^{40}Ti +^4 He &\rightarrow {}^{48}Cr + \gamma & (85)\\
^{48}Cr +^4 He &\rightarrow {}^{52}Fe + \gamma & (86)\\
^{52}Fe +^4 He &\rightarrow {}^{56}Ni + \gamma & (87)
\end{aligned}
$$

Otras reacciones ...

El ^{56}Ni es inestable, se desintegra para dar ^{56}Co y luego ^{56}Fe uno de los núcleos más estables de la naturaleza. La acumulación de hierro en el núcleo estelar lleva a una crisis energética: no hay fusión nuclear posible que libere energía.

$$^{56}Ni \rightarrow {}^{56}Co + e^{+} + \nu_e \tag{88}$$
$$^{56}Co \rightarrow {}^{56}Fe + e^{+} + \nu_e \tag{89}$$

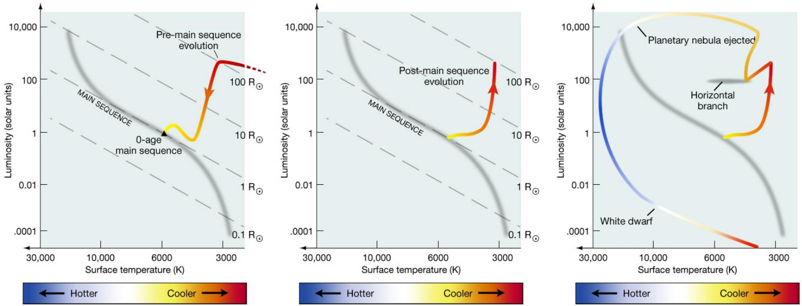
Modelos

Con todos estos ingredientes (+Saha, +Boltzmann, cálculo de opacidades k) se pueden resolver numéricamente para cada r, y generar un modelo estelar.

Camino evolutivo: curva sobre el diagrama HR que une las posiciones que irá tomando una estrella durante su vida.

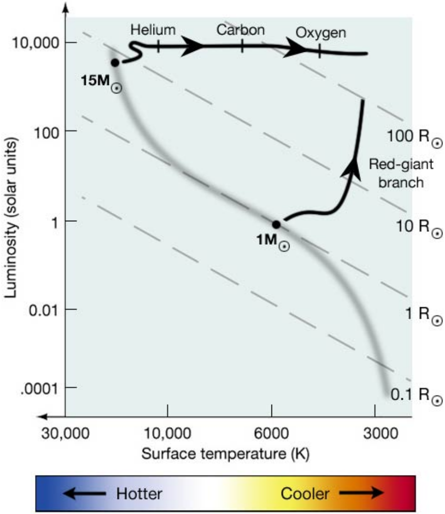
Isocrona: Líneas que unen posiciones de estrellas de distintas masas a un dado tiempo.

Modelos

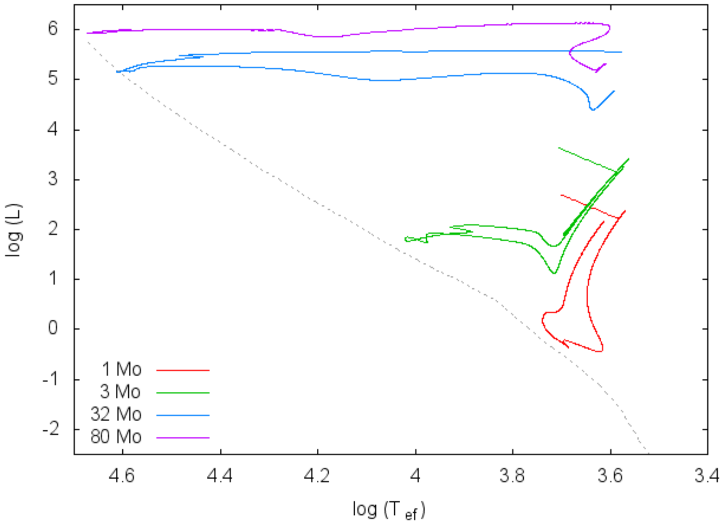


Contracción (rotación) → secuencia principal → gigante → flash de He → rama horizontal → nebulosa planetaria → enana blanca.

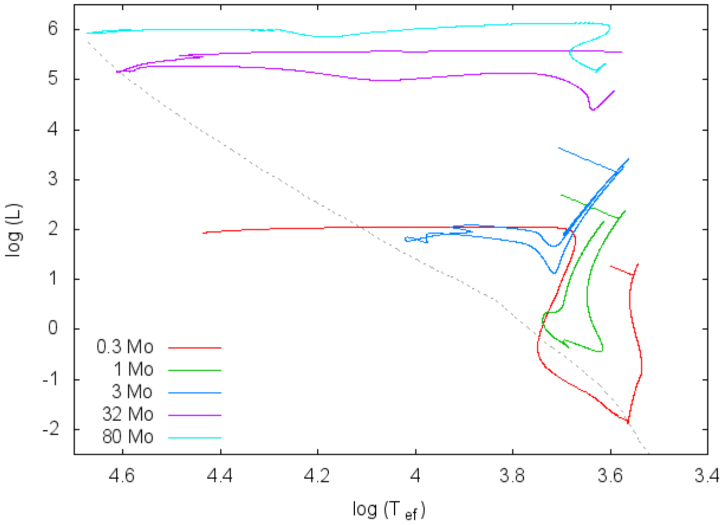
Modelos


Helium
Carbon
Oxygen
10,000
100
1
0.01
.0001
15M⊙
1M⊙
100 R⊙
Red-giant branch
10 R⊙
1 R⊙
0.1 R⊙
Luminosity (solar units)
30,000
10,000
6000
3000
Surface temperature (K)
Hotter
Cooler

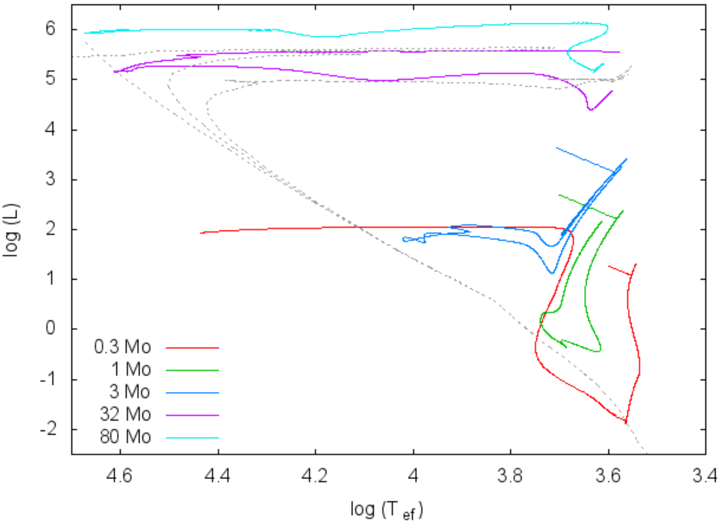
Modelos



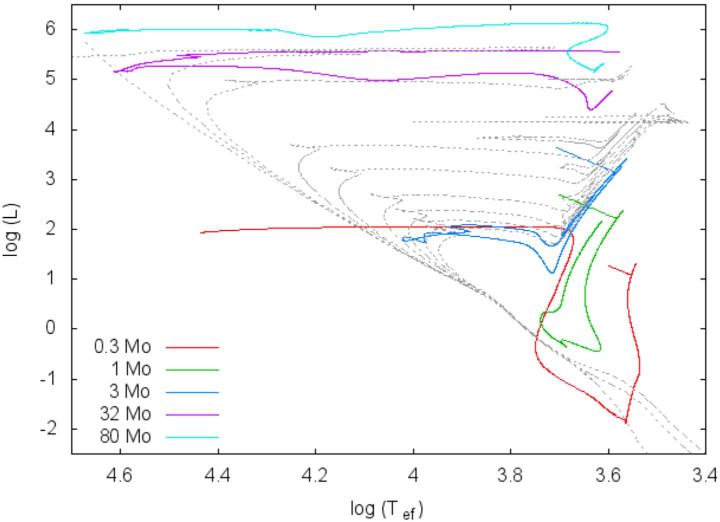
Modelos


6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
log (L)
4.6
4.4
4.2
4
3.8
3.6
3.4
log (T ef)
0.3 Mo
1 Mo
3 Mo
32 Mo
80 Mo

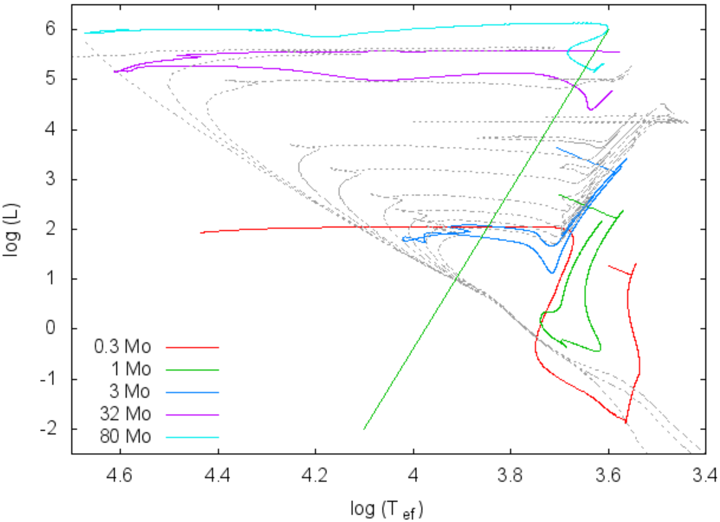
Modelos


6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
log (L)
0.3 Mo
1 Mo
3 Mo
32 Mo
80 Mo
4.6
4.4
4.2
4
3.8
3.6
3.4
log (T ef)

Modelos


log (L)
log (T ef)
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
4.6
4.4
4.2
4
3.8
3.6
3.4
0.3 Mo
1 Mo
3 Mo
32 Mo
80 Mo

Modelos


6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
log (L)
4.6
4.4
4.2
4
3.8
3.6
3.4
log (T ef)
0.3 Mo
1 Mo
3 Mo
32 Mo
80 Mo